CLASS Bologna

Analisi Matematica @ Class

Funzioni reali di una variabile reale

Lezione 3

22 settembre 2015

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Funzioni reali di una variabile reale

Con il termine funzione reale di una variabile $f : D \to T$ intendiamo che siano assegnati:

- **un sottoinsieme di D di $\mathbb{R}$ il dominio della funzione f.**

Funzioni reali di una variabile reale

Con il termine funzione reale di una variabile $f : D \to T$ intendiamo che siano assegnati:

- **un sottoinsieme di D di $\mathbb{R}$ il dominio della funzione f.**
- **una variabile indipendente che denoteremo con la lettera x.**

Funzioni reali di una variabile reale

Con il termine funzione reale di una variabile $f : D \to T$ intendiamo che siano assegnati:

- un sottoinsieme di D di $\mathbb{R}$ il **dominio** della funzione f.
- una **variabile indipendente** che denoteremo con la lettera x.
- un sottoinsieme T di $\mathbb{R}$ di outputs della funzione, chiamato **codominio** della funzione.

Funzioni reali di una variabile reale

Con il termine funzione reale di una variabile $f : D \to T$ intendiamo che siano assegnati:

- un sottoinsieme di D di $\mathbb{R}$ il dominio della funzione f.
- una variabile indipendente che denoteremo con la lettera x.
- un sottoinsieme T di $\mathbb{R}$ di outputs della funzione, chiamato codominio della funzione.
- una formula, che associa ad ogni input del dominio un unico output. Questa formula sarà denotata con $x \mapsto f(x)$ o più semplicemente $f(x)$.

Definizione

L'immagine im(f) di $f : D \to T$ è il sottoinsieme del codominio T definito da

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

Definizione

L'immagine $\mathrm{im}(f)$ di $f : D \to T$ è il sottoinsieme del codominio T definito da

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

Il grafico della funzione $f : D \to T$ è il sottoinsieme di $D \times T$

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y) \in D \times T : y = f(x), x \in D\}.$$

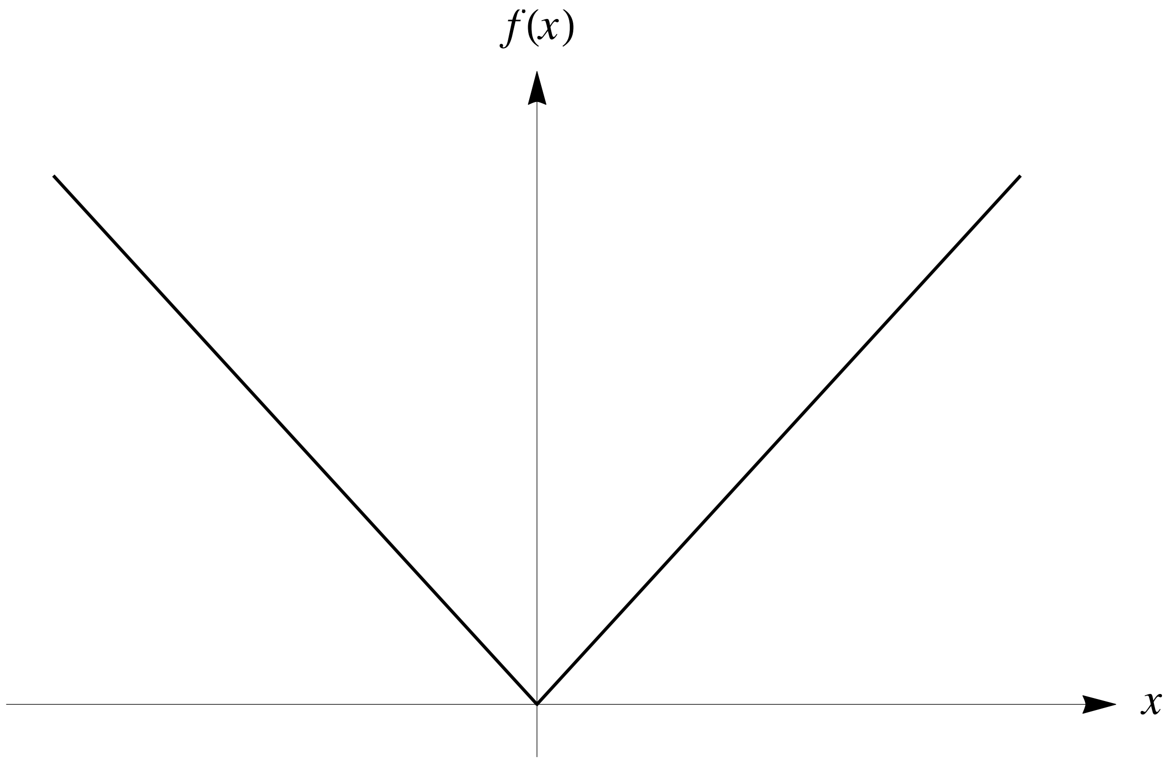


Figure 1: $x \mapsto f(x) = |x|$

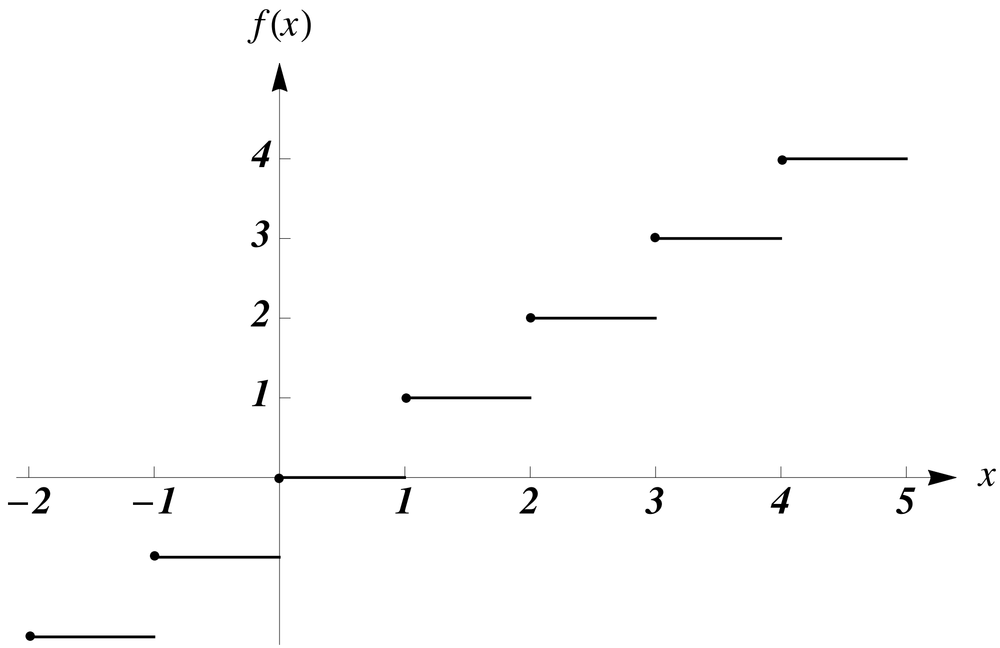


Figure 2: $x \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor$

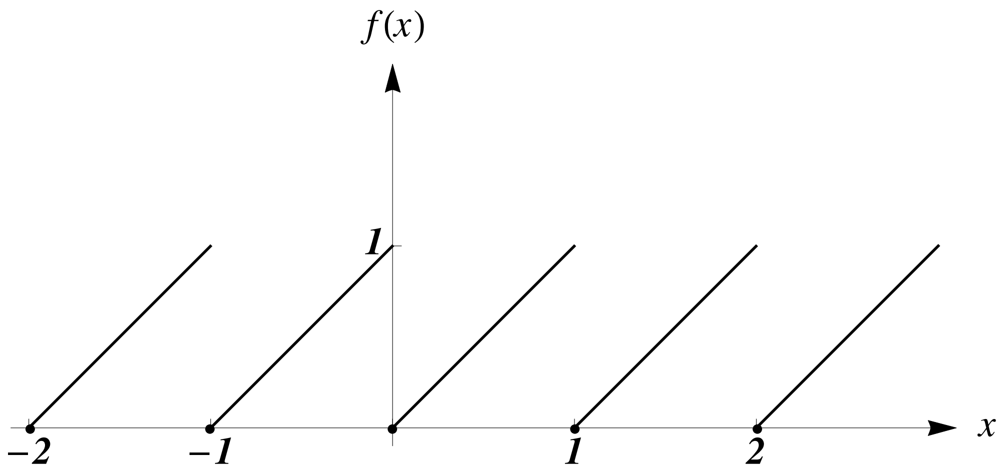


Figure 3: $x \mapsto f(x) = \{x\}$

Definizione

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita sull'intervallo I si dice

a) crescente, se $x,\, y \in I,\, x < y \implies f(x) \le f(y)$

strettamente crescente, se

$$x,\, y \in I,\, x < y \implies f(x) < f(y)$$

b) decrescente, se $x,\, y \in I,\, x < y \implies f(x) \ge f(y)$

c) strettamente decrescente, se

$$x,\, y \in I,\, x < y \implies f(x) > f(y)$$

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **si dice**

1) pari se per ogni $x \in \mathbb{R}$ **si ha** $f(-x) = f(x)$

2) dispari se per ogni $x \in \mathbb{R}$ **si ha** $f(-x) = -f(x)$

Definizione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

1) pari se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(-x) = f(x)$

2) dispari se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(-x) = -f(x)$

Teorema

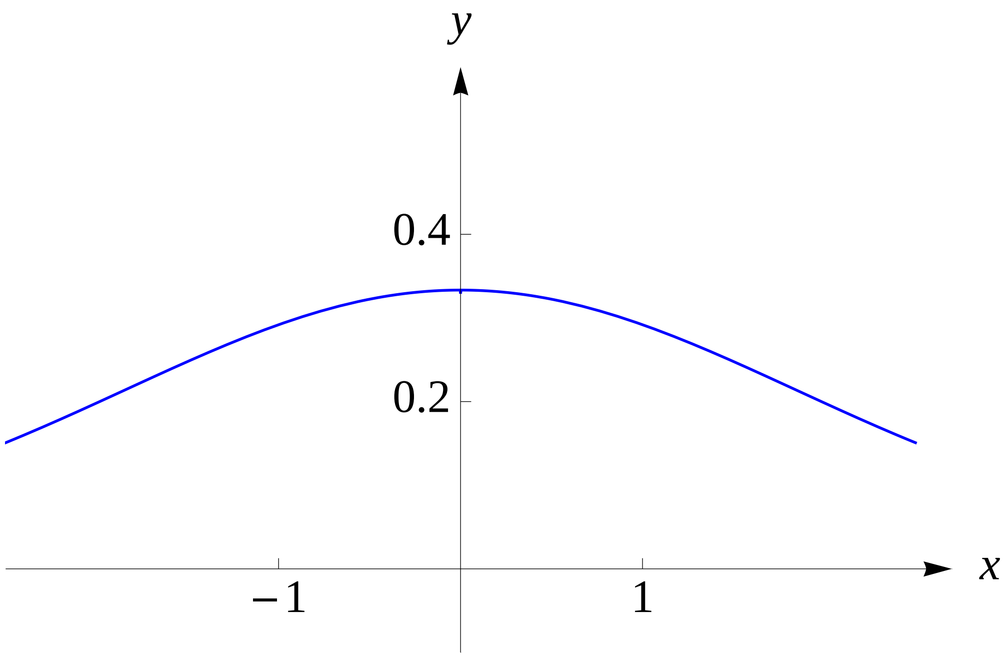
Ogni funzione $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}$ tale per cui $x \in D$ implica $-x \in D$ può essere espressa come la somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

Limiti

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$

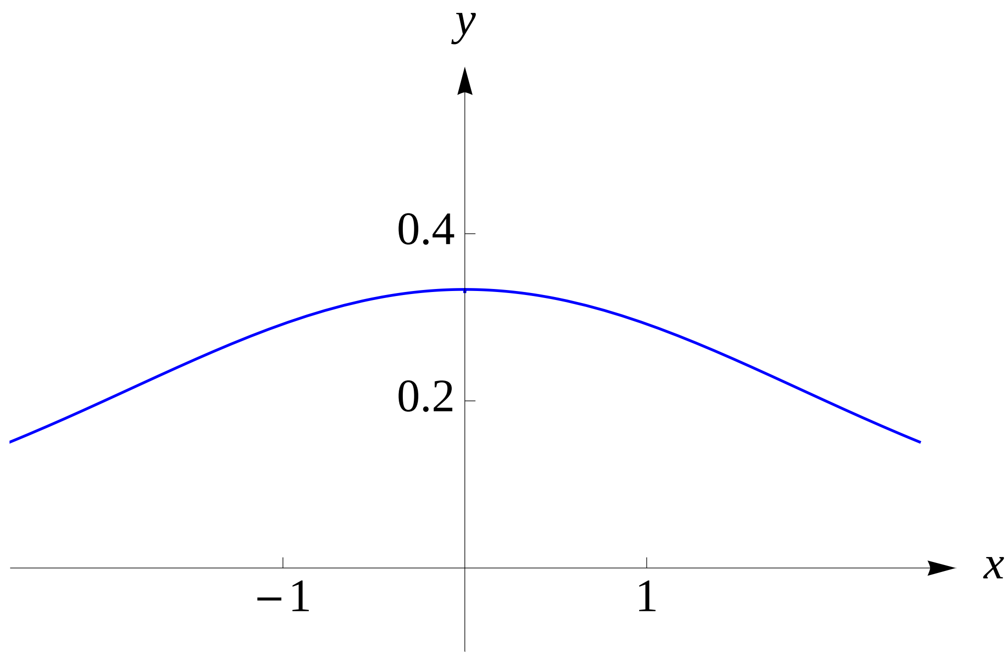
Limiti

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$



Limiti

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$



Che significato possiamo dare a $f(0)$?

L'Analisi Matematica rende rigoroso quello che in casi come questo il buon senso suggerisce

L'Analisi Matematica rende rigoroso quello che in casi come questo il buon senso suggerisce

Se non posso valutare

$$f(x) = \frac{\cos^2 x - 1 + x^2}{x^4}$$

in zero lo farò per valori vicini a zero

Costruiamo la tabella

$$\begin{pmatrix} x & f(x) \\ 1 & 0.291927 \\ \frac{1}{2} & 0.322418 \\ \frac{1}{3} & 0.328434 \\ \frac{1}{4} & 0.330568 \\ \frac{1}{5} & 0.331561 \\ \frac{1}{6} & 0.332101 \\ \frac{1}{7} & 0.332428 \\ \frac{1}{8} & 0.332640 \\ \frac{1}{9} & 0.332785 \\ \frac{1}{10} & 0.332889 \end{pmatrix}$$

proseguiamo

$$\begin{pmatrix} x & f(x) \\ \frac{1}{91} & 0.333328 \\ \frac{1}{92} & 0.333328 \\ \frac{1}{93} & 0.333328 \\ \frac{1}{94} & 0.333328 \\ \frac{1}{95} & 0.333328 \\ \frac{1}{96} & 0.333329 \\ \frac{1}{97} & 0.333329 \\ \frac{1}{98} & 0.333329 \\ \frac{1}{99} & 0.333329 \\ \frac{1}{100} & 0.333329 \end{pmatrix}$$

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia I un intervallo aperto che contiene x_0 e sia f una funzione definita in tutti i punti di I eccettuato al più x_0.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia I un intervallo aperto che contiene x_0 e sia f una funzione definita in tutti i punti di I eccettuato al più x_0. Diremo che f tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ riesce $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia I un intervallo aperto che contiene x_0 e sia f una funzione definita in tutti i punti di I eccettuato al più x_0. Diremo che f tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per x tendente a x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ riesce $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

In tale situazione scriviamo $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ e diciamo che ℓ è il limite per x tendente a x_0 di f.